DOI 10.36074/grail-of-science.25.06.2021.036

РАЗВЕРТКА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Борисенко Алексей Андреевич
доктор технических наук, профессор,
Сумский государственный университет, Украина

Аннотация. В ряде практических задач компьютерной логики встречается задача преобразования (развертки) булевых функций, представленных в КНФ, в СКНФ. Например, такая задача встречается при их минимизации. Решение этой задачи при большом количестве дизъюнкций в КНФ может вызвать затруднение. Поэтому с целью уменьшения количества вычислительных операций предлагается использовать промежуточную КНФ в виде ОКНФ. Она состоит из несовместимых дизъюнкций, которые имеют инверсные переменные по отношению друг к другу.

Ключевые слова: булева функция, КНФ, ОКНФ, СКНФ, развертка, переменные, конституенты 0, дизъюнкции.

Введение. Развертка булевых функций производится при минимизации булевых функций, как первый ее шаг, если они заданы в сокращенных формах ДНФ или КНФ, для преобразования их в совершенные формы СДНФ или СКНФ [1,2]. Как известно, ДНФ представляется суммой конъюнкций, а СДНФ - суммой конституент 1. Соответственно КНФ представляется произведением дизъюнкций, а СДНФ - произведением конституент 0 [1,2]. При максимальной длине разверток, которые рассматриваются в данной работе, каждая входящая в ДНФ дизъюнкция или конъюнкция в КНФ разворачивается соответственно до конституенты 1 или конституенты 0. Однако могут быть и развертки с более короткой длиной, при которой дизъюнкции и конъюнкции имеют большую длину, чем имели в исходной ДНФ или КНФ, но меньшую по сравнению с длинами конституент 1 или 0. В данной работе рассматривается лишь развертки в КНФ. В ДНФ они происходят по аналогии с КНФ.

Постановка задачи. Во время развертки ДНФ или КНФ обычным способом появляются избыточные конституенты 1 или 0, для устранения которых требуется их экспоненциальный перебор во времени. Задачей данной работы является уменьшение длительности этого перебора.

Решение задачи. Булева функция в КНФ, как известно, состоит из произведения дизъюнкций, каждая из которых содержит сумму i переменных (X1 + X2 + … + X i), i ≤ n, где n их максимальная длина, равная количеству переменных в конституентах 0. При этом некоторые переменные в дизъюнкциях могут отсутствовать.

В основе обычного метода разверток дизъюнкций и соответствующих им булевых функций лежит хорошо известное правило [1,2], по которому произведение (X1 + X2)(X1 + ¬X2) = X1. Это значит, что при n = 4, дизъюнкция

(X1 + X2) = (X1 + X2 + X3 + X4)(X1 + X2 + X3 + ¬X4)(X1 + X2 + ¬X3 + X4) (X1 + X2 + ¬X3 + ¬X4), а дизъюнкция

$$(X1 + X3) = (X1 + X2 + X3 + X4)(X1 + X2 + X3 + \neg X4)(X1 + \neg X2 + X3 + X4) (X1 + \neg X2 + X3 + \neg X4).$$

Очевидно, что первые две конституенты 0 дизъюнкции (X1 + X2) совпадают с первыми двумя конституентами 0 дизъюнкции (X1 + X3). Каждую из них следует заменить одной соответствующей конституентой 0. В результате булева функция F в развернутом виде будет иметь вид:

$$F = (X1 + X2)(X1 + X3) = (X1 + X2 + X3 + X4) (X1 + X2 + X3 + \neg X4) (X1 + X2 + \neg X3 + X4) (X1 + X2 + \neg X3 + \neg X4)(X1 + \neg X2 + X3 + X4) (X1 + \neg X2 + X3 + \neg X4).$$

Она содержит уже не 8 конституент 0, как это было до устранения повторяющихся конституент 0, которые являются избыточными, а 6.

Для выявления избыточных конституент 0 необходима процедура их сравнения между собой. Поэтому развертка уже при относительно небольших количествах дизъюнкций может стать нереальной во времени ее выполнения. Соответственно нужен более эффективный метод устранения из дизъюнкций лишних конституент 0.

Такой метод предлагается в данной работе. Его идея состоит в том, что для уменьшения величины экспоненциального количества перебора сравниваемых конституент 0 используется специальная обновленная (очищенная) КНФ (ОКНФ). Она получается преобразованием из исходной КНФ по специальным правилам, вытекающим из соответствующих теорем, рассматриваемых ранее в предыдущих работах автора.

Основным свойством ОКНФ булевой функции является то, что она состоит из несовместимых дизъюнкций. Это дизъюнкции, в каждой из которых имеется хотя бы одна инверсная переменная по отношению к одноименным переменным всех остальных дизъюнкций ОКНФ. Тогда в дизъюнкциях ОКНФ будут гарантировано отсутствовать повторяющиеся конституенты 0. Остается только получить из этих дизъюнкций по приведенному выше правилу конституенты 0, которые не будут избыточными, то есть они не будут повторяться.

Однако так как количество конституент 0 в булевой функции определяется количеством равным два в степени n, то и в этом случае задача развертки в ряде случаев остается экспоненциальной, но в значительно меньшей степени. Это, притом, что количество конституент 0 в ОКНФ до ее развертки можно определить за полиномиальное время. Тем самым автором в предыдущих работах была решена широко известная задача «Выполнимость», по которой требовалось определить существование хотя бы одного набора переменных, на котором соответствующая булева функция равна 1.

Так, например, в отличие от функции F = (X1 + X2)(X1 + X3), новая функция F = (X1 + X2)(¬X1 + X3) является очищенной (обновленной), так как записана в ОКНФ. В ней переменная X1 в первых скобках идет без инверсии, а во вторых с инверсией. Развертка функции F имеет вид:

$$F = (X1 + X2)(\neg X1 + X3) = (X1 + X2 + X3 + X4)(X1 + X2 + X3 + \neg X4) (X1 + X2 + \neg X3 + X4)(X1 + X2 + \neg X3 + \neg X4)(\neg X1 + X2 + X3 + X4) (\neg X1 + X2 + X3 + \neg X4)(\neg X1 + \neg X2 + X3 + X4)(\neg X1 + \neg X2 + X3 + \neg X4).$$

Очищенная функция F показывает, что содержит 8 конституент 0. Среди них нет ни одной повторяющейся конституенты 0.

Подсчет количества конституент 0 в функции F определяют ее выполнимость. Так как оно равно 8, а всех конституент 0 для 4 переменных должно быть 16, то очевидно, что функция F выполнима, так как существует 8 наборов, на которых данная функция равна 1. Например, она равна 1 на наборе 1111, что легко проверяется его подстановкой в функцию F.

Очевидно, что при больших значениях n определение всех выполняющих наборов будет трудно разрешаемой задачей. Простейший вариант ее решения будет состоять в записи по возрастанию всех наборов, на которых функция F равна 0. Затем перебираются все наборы из их количества 2 в степени n и сравниваются с обнуляющими функцию F наборами. При их совпадении с обнуляющими наборами они вычеркиваются. В конечном итоге, в списке не вычеркнутых наборов останутся только те наборы, на которых функция F равна 1. Очевидно, что для рассматриваемого примера таких наборов будет 8.

Например, в рассмотренном выше примере из 16 возможных наборов надо вычленить наборы, на которых функция F равна 0: 0000, 0001, 0010, 0011, 1000, 1001, 1100, 1101. Тогда останутся 8 выполняющих наборов 0100 0101, 0110, 0111, 1010, 1011, 1110, 1111, которые преобразуют функцию F в 1.

Вывод. Таким образом, в данной работе предложен ускоренный метод развертки булевых функций в КНФ за счет применения ОКНФ, который также позволяет находить выполняющие наборы, на которых булева функция равна 1. Однако при этом время поиска выполняющих наборов в общем случае остается по-прежнему экспоненциальным.

Список использованных источников:

[1] Борисенко А. А. (2020). *Компьютерная логика. Основы теории*: Сумы: Університетська книга.

[2] Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. (2004). *Компютерна дискретна математика*: Харків: «Компанія СМІТ».

