

Муминов Хикмат Халимович

доктор физико-математических наук, профессор, академик
Национальной Академии Республики Таджикистан, Республика Таджикистан

Мухамедова Шоира Файзуллоевна

кандидат физико-математических наук, доцент
Таджикского Государственного университета право, бизнес и политики,
Республика Таджикистан

ФОРМИРОВАНИЕ СТРАННОГО АТТРАКТОРА В ВЕКТОРНОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

Аннотация. В данной работе наблюдается бифуркация с несколькими пульсациями диссипативных солитонов векторного нелинейного уравнения Шредингера (системы двух уравнений) с самосогласованным потенциалом $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$ при наличии подкачки и ненулевой скорости движения, что говорит о формировании хаотического солитона или так называемого «странного аттрактора».

Ключевые слова: *n*-солитонное решение, подкачка, диссипация, векторное нелинейное уравнение Шредингера, диссипативный солитон, пульсация, бифуркация, хаотический солитон.

Солитоны принадлежат к классу локализованных решений нелинейных эволюционных уравнений, они являются уединенными волнами [1]. Солитон представляет собой устойчивую особую точку в бесконечномерном фазовом пространстве. В последние десятилетия в связи с практическими приложениями солитонов в нелинейной оптике, фотонике, начались активные исследования поведения солитонов в диссипативных средах, при наличии внешней подкачки. Выяснилось, что возможно формирование диссипативных солитонов при условии динамического равновесия в системе между притоком энергии и его диссипацией. Рассмотрим векторное нелинейное уравнение Шрёдингера (ВНУШ)

$$\begin{aligned}i \varphi_{1t} - \varphi_{1xx} + u(x, t)\varphi_1 &= 0 \\i \varphi_{2t} - \varphi_{2xx} + u(x, t)\varphi_2 &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

с самосогласованным потенциалом

$$u(x, t) = \bar{\varphi}_1 \varphi_2 + \varphi_1 \bar{\varphi}_2. \quad (2)$$

Используем решение для системы (1) с самосогласованным потенциалом (2), в следующем виде, которое было получено в [6]

$$\begin{aligned} \varphi_i = A_i e^{i(q_1 x + w_1 t)} \cosh(\beta_1(x + v_1 t) + b_i) + B_i e^{i(q_2 x + w_2 t)} \cosh(\beta_2(x + \\ + v_2 t) + a_i) / (B_1 \cosh(\beta^+(x + v^+ t) + h_1) + \cosh(\beta^-(x + v^- t) + h_2) + \\ + B_3 \cos(qx + wt + w_{01})) \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$W_1(x, t) = \alpha_1 t + (\alpha_1^2 - \beta_1^2)t, \quad W_2(x, t) = \alpha_2 t + (\alpha_2^2 - \beta_2^2)t$$

$$P_1(x, t) = \beta_1(x + 2\alpha_1 t), \quad P_2(x, t) = \beta_2(x + 2\alpha_2 t)$$

$$\kappa_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \kappa_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad \kappa_{ij} = \kappa_i - \bar{\kappa}_j, \quad \bar{\kappa}_{ij} = \bar{\kappa}_i - \kappa_j$$

$$\beta^+ = \beta_1 + \beta_2, \quad \beta^- = \beta_2 - \beta_1, \quad v^\pm = \frac{2(\alpha_2 \beta_2 \pm \alpha_1 \beta_1)}{\beta_2 \pm \beta_1}, \quad i, j = 1, 2.$$

$$q = \alpha_2 - \alpha_1, \quad w = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + (\beta_2^2 - \beta_1^2), \quad w_{01} = -\frac{i}{2} \ln \left| \frac{C_{12} \kappa_{12}}{C_{21} \kappa_{21}} \right|,$$

$$A_1 = - \left[\frac{\gamma_1 \bar{\kappa}_{12} (\gamma_1 C_{12} - \gamma_2 C_{11})}{\kappa_{21} \kappa_{11}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad B_1 = - \left[\frac{\gamma_1 \bar{\kappa}_{21} (\gamma_2 C_{21} - \gamma_1 C_{22})}{\kappa_{11} \kappa_{22}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$A_2 = - \left[\frac{\bar{\beta}_1 \bar{\kappa}_{12} (\bar{\beta}_1 C_{12} - \bar{\beta}_2 C_{11})}{\kappa_{21} \kappa_{11}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad B_2 = - \left[\frac{\bar{\beta}_1 \bar{\kappa}_{21} (\bar{\beta}_2 C_{21} - \bar{\beta}_1 C_{22})}{\kappa_{11} \kappa_{22}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$B_3 = \left[\frac{C_{11} C_{22}}{(k - \kappa_1)(k - \kappa_2)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\gamma_2 \bar{\kappa}_{12}}{\bar{\kappa}_{21} \kappa_{11} (\gamma_1 C_{12} - \gamma_2 C_{11})} \right|, \quad a_1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\gamma_1 \bar{\kappa}_{21}}{\bar{\kappa}_{12} \kappa_{22} (\gamma_2 C_{21} - \gamma_1 C_{22})} \right|,$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\bar{\beta}_2 \bar{\kappa}_{12}}{\bar{\kappa}_{21} \kappa_{22} (\bar{\beta}_1 C_{12} - \bar{\beta}_2 C_{22})} \right|, \quad a_2 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\bar{\beta}_1 \bar{\kappa}_{21}}{\bar{\kappa}_{12} \kappa_{22} (\bar{\beta}_2 C_{21} - \bar{\beta}_1 C_{22})} \right|.$$

$$h_1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\kappa_{21}}{\kappa_{11} \kappa_{22} C_{22}} \right|, \quad h_2 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{C_{11} \kappa_{11}}{\kappa_{22} C_{22}} \right|$$

Как указывалось, ранее, к числу диссипативных солитонов относится пульсирующий солитон. Существование пульсирующих солитонов было предсказано в численных экспериментах, позже они были обнаружены

экспериментально в волоконной оптике [1-3]. Пульсирующие солитоны формирует набор возможных локализованных решений и могут быть описаны как предельный цикл бесконечномерных диссипативных динамических систем. При изменении параметров уравнений пульсирующие солитоны могут проявлять более сложное поведения, происходит переход от одного режима к другому, т.е. происходит бифуркация удвоения периода. Дальнейшее изменение параметров уравнения может вызвать дальнейшие удвоение или учетверенные периоды бифуркации. При правильном выборе траектории в пространстве можно наблюдать последовательность бесконечного числа бифуркаций удвоения периода, и это приводит к появлению т.н. хаотического солитона. Этот путь к хаотическим солитонам аналогичен сценарию Фейгенбаума перехода к хаосу в конечномерных системах или в «логистическом отображении» [4]. Следует отметить, что анализ численных экспериментов многосолитонных решений (3) для системы (1) показывает, что при наличии диссипации, подкачки и скорости движения солитона формируются долгоживущие диссипативные солитоны предельного цикла [5].

Для приложения путь к хаотическим солитонам, т.е. рассмотрение происхождений бифуркации с несколькими пульсациями, используем метод ввода диссипации и подкачки как в уравнении Свифта Хоенберга [1]. При вводе диссипации и подкачки векторное нелинейное уравнение Шредингера (1) с самосогласованным потенциалом (2) имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
 & i \varphi_{1t} - \varphi_{1xx} + u(x, t)\varphi_1 + v|\varphi_1|^4\varphi_1 = \\
 & = i\delta\varphi_1 + i\varepsilon|\varphi_1|^2\varphi_1 + i\beta\varphi_{1xx} + i\mu|\varphi_1|^4\varphi_1 + is\varphi_{1xxxx} \\
 & i \varphi_{2t} - \varphi_{2xx} + u(x, t)\varphi_2 + v|\varphi_1|^4\varphi_1 = \\
 & = i\delta\varphi_2 + i\varepsilon|\varphi_2|^2\varphi_2 + i\beta\varphi_{2xx} + i\mu|\varphi_2|^4\varphi_2 + is\varphi_{1xxxx} \quad (5)
 \end{aligned}$$

с самосогласованным потенциалом

$$u(x, t) = \bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2.$$

где v , δ , ε , β , μ и s параметры диссипации и подкачки внешним полем [7]. Авторами ставится задача в выявление условий формирования хаотических солитонов при наличии подкачки внешними полями и скорости движения

солитона. В ходе численных экспериментов скорость солитона задавалась при $v=0.13$ и для контроля консервативности численной схемы использовались интегралы импульса, числа частиц и полной энергии данной системы

$$P = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\varphi}_{1x} + \bar{\varphi}_{2x})(\varphi_1 + \varphi_2) - (\varphi_{1x} + \varphi_{2x})(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2) dx, \quad (7)$$

$$N = \int (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) dx, \quad (8)$$

$$E = \int \frac{1}{2} (|\varphi_{1x}|^2 + |\varphi_{2x}|^2) + u(x, t) (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) dx. \quad (9)$$

Для численного моделирования была написана трехслойная разностная схема, второго порядка точности, как по времени, так и по координате.

Условия устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{4}$, где τ и h шаги, соответственно, по времени и по координате. Серия численных экспериментов проводилась при различных значениях параметров многосолитонного решения, а также диссипации и подкачки. Результаты графиков солитонов поверженных бифуркации показаны на рисунках 1-9. Вычислительных экспериментах интеграл импульса, числа частиц и интеграл энергии сохранялись с хорошей точностью $\frac{\Delta P}{P} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, $\frac{\Delta Q}{Q} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, $\frac{\Delta E}{E} \sim 10^{-6} - 10^{-7}$.

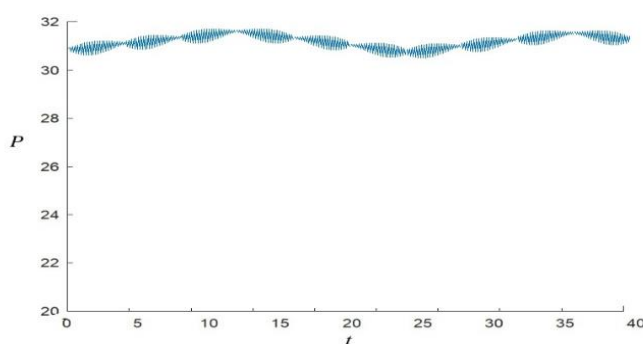


Рис.1. Интеграл импульса солитона

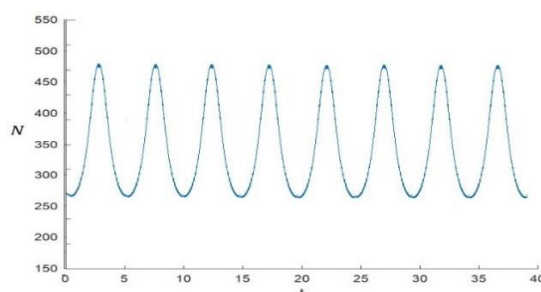


Рис.2. Интеграл числа частиц солитона

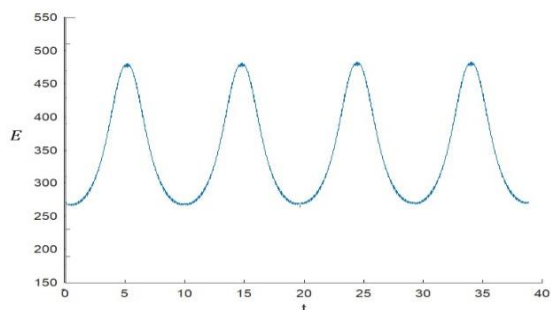


Рис.3. Интеграл энергии солитона

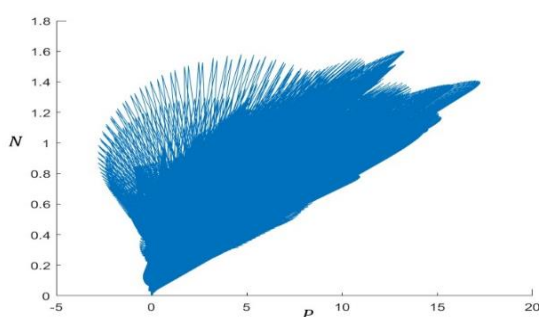


Рис.4. Фазовый портрет системы
(зависимость плотности импульса
от плотности числа частиц)

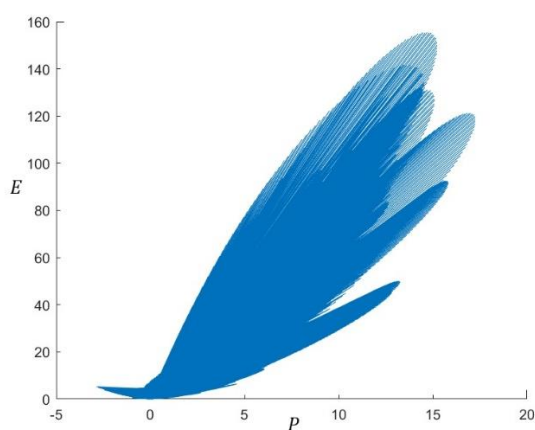


Рис.5. Фазовый портрет системы
(зависимость плотности импульса
от плотности энергии)

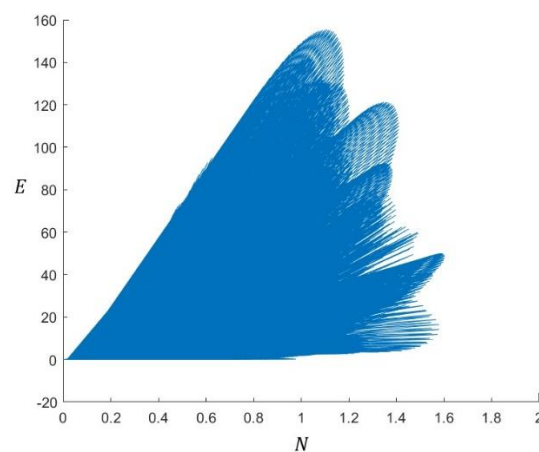


Рис.6. Фазовый портрет системы
(зависимость плотности числа
частиц от плотности энергии
солитона)

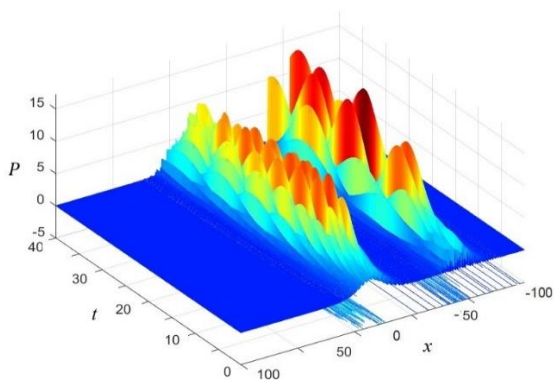


Рис.7. Эволюция плотности
импульса солитона.=

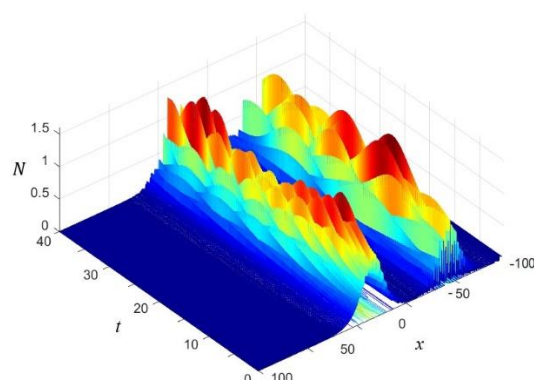


Рис.8. Эволюция плотности числа
частиц солитона

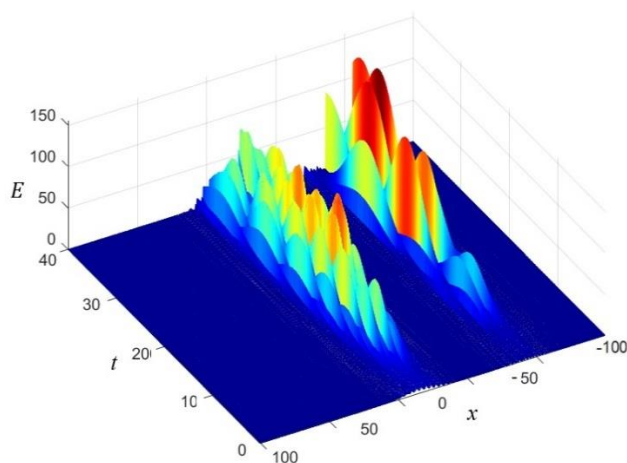


Рис.9. Эволюция плотности энергии солитона

Таким образом, численное моделирование солитонного решения (3) при наличии диссипации, подкачки и при ненулевой скорости движения демонстрирует, что солитон обладает различной формой для различных параметров. Поскольку солитон меняется, но он восстанавливает в точности в исходную форму через период, где подкачка полностью компенсирует затухание, и колебания интегралов моментов варьируют в соответствующих диапазонах (рис.1-3). Фазовые траектории (см. рис.4-6) показывают, что плавные локализованные начальные распределения с параметрами, близкими к точке, расположенной в этой области, будут сходиться к хаотическому солитону, а траектория в фазовом пространстве будет притягиваться к этой области [8]. Также эволюция плотности моментов системы (5) показывает динамическое равновесие в системе между притоком энергии и его диссипацией и солитон проявляет пульсирующие поведения (рис. 7-9), что говорит о возможности формирования диссипативных солитонов и можно назвать этот тип солитонных решений «странным аттрактором».

Список источников:

1. Maruno K., Ankiewicz A., Akhmediev N. Exact soliton solutions of the onedimensional complex Swift-Hohenberg equation // Physica. 2003. D 176. p.44-66.
2. Soto-Crespo J. M. and Akhmediev N., Phys. Rev. E 66, 066610 (2002)

3. Soto-Grespo J. M., Akhmediev N. and Chiang K., *PhysLett. A* 291, 115
4. Feigenbaum M. J. Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations. // *J. Stat. Phys.* 1978. 19. p.25-52.
5. Муминов Х.Х., Мухамедова Ш.Ф. - Генерация пульсации диссипативных солитонов векторного нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным потенциалом $\bar{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\bar{\varphi}_2$ // *Известия АН РТ*, № 3, 2020
6. Дубровин Б.А., Маланюк Т.М., Кричевер И.М., Маханьков В.Г. – Точные решения нестационарного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами. – *ЭЧАЯ*, 1988, т. 19, в. 3, с. 579-621.
7. Муминов Х.Х., Мухамедова Ш.Ф. Формирование когерентных структур комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау // X Международная научно-практическая интернет-конференция «Проблемы и перспективы развития науки в начале третьего тысячелетия в странах СНГ» 29-30 апреля 2013. - С. 159-161.
8. *Диссипативные солитоны* / Ред. Ахмедиева Н., Анкевича А. -. //М.: ФИЗМАТЛИТ 2008, с.504.