Нікічанов В'ячеслав Володимирович
доцент кафедри металевих та дерев'яних конструкцій
Харківський національний університет будівництва та архітектури, Україна

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ ПРИ ЗАДАНИХ УМОВАХ ГЛАДКОГО КОНТАКТУ НА МЕЖАХ ШАРУ І ПЕРЕМІЩЕНЬ НА ПОВЕРХНІ ПОРОЖНИНИ

Анотація. *Розв'язана просторова задача теорії пружності для шару, який має кругову циліндричну поздовжню порожнину. На верхній та нижній межах шару задані умови гладкого контакту (нормальні переміщення та дотичні напруження). На поверхні порожнини задані переміщення. Задачу розв'язано узагальненим методом Фур'є. В чисельному досліджені отримані напруження на поверхні порожнини від дії ненульового нормального переміщення на поверхнях шару.*

Ключові слова: *шар з порожниною, умови гладкого контакту, узагальнений метод Фур'є.*

При проектуванні різного роду конструкцій важливою складовою є визначення напружено-деформованого стану тіла. Однак задачі для шару з циліндричною порожниною в просторовому вигляді мало представлені в науковій літературі.

Для розв'язання подібних задач в аналітико-чисельному вигляді найбільш ефективним є узагальнений метод Фур'є [1].

Ефективність узагальненого методу Фур'є доведена в задачах для циліндра з циліндричними порожнинами і циліндричними включеннями [2 – 5], для півпростору з однією або декількома циліндричними порожнинами [6 – 8]. На основі цього методу також розв'язані задачі для шару з циліндричною порожниною [9 – 14] та задачі для шару з пружним включенням [15 – 17].

В даній роботі запропоновано розв'язання задачі для шару з поздовжньою круговою циліндричною порожниною за заданих на верхній та нижній межах шару умов гладкого контакту (нормальних переміщень та дотичних напружень), на поверхні порожнини – переміщень.

Постановка задачі.

В пружному однорідному шарі, паралельно його межам, розташована кругова циліндрична порожнина радіусом *R*.

Циліндричну порожнину будемо розглядати у циліндричній системі координат (ρ, φ, *z*), шар у декартовій системі координат (*x*, *y*, *z*), яка однаково орієнтована та поєднана з системою координат порожнини [10]. Верхня межа шару розташована на відстані $y = h$, нижня межа на відстані $y = -\tilde{h}$. Потрібно знайти розв'язок рівняння Ламе за умов, що на верхній межі шару задані умови гладкого контакту

$$\left.\begin{aligned} U_y(x,z)_{|y=h} &= U_0^{(h)}(x,z), \\ \tau_{xy|y=h} &= \tau_1^{(h)}(x,z), \\ \tau_{yz|y=h} &= \tau_2^{(h)}(x,z) \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

на нижній межі шару умови гладкого контакту

$$\left.\begin{aligned} U_y(x,z)_{|y=-\tilde{h}} &= U_0^{(\tilde{h})}(x,z), \\ \tau_{xy|y=-\tilde{h}} &= \tau_1^{(\tilde{h})}(x,z), \\ \tau_{yz|y=-\tilde{h}} &= \tau_2^{(\tilde{h})}(x,z) \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

на внутрішній поверхні порожнини задані переміщення $\vec{U}_2(\varphi,z)_{|\rho=R} = \vec{U}_R^0(\varphi,z)$,

де $U_0^{(h)}(x,z)$, $\tau_1^{(h)}(x,z)$, $\tau_2^{(h)}(x,z)$, $U_0^{(\tilde{h})}(x,z)$, $\tau_1^{(\tilde{h})}(x,z)$, $\tau_2^{(\tilde{h})}(x,z)$,

$$\vec{U}_R^0(\varphi,z) = U_\rho^{(p)}\vec{e}_\rho + U_\varphi^{(p)}\vec{e}_\varphi + U_z^{(p)}\vec{e}_z \tag{3}$$

відомі функції.

Усі задані вектори і функції будемо вважати швидко спадаючими до нуля на далеких відстанях від початку координат по координаті *z* для поверхі порожнини та по координатах *x* і *z* для меж шару.

Розв'язок задачі представимо у вигляді [10]:

$$\vec{U}=\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}B_{k,m}(\lambda)\cdot\vec{S}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)d\lambda+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(H_k(\lambda,\mu)\cdot\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)+\tilde{H}_k(\lambda,\mu)\cdot\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)\right)d\mu d\lambda, \tag{4}$$

де $\vec{S}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)$, $\vec{R}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)$ $\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ *і* $\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ *базисні розв'язки рівняння Ламе у формі [1], а невідомі функції* $H_k(\lambda,\mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$ *і* $B_{k,m}(\lambda)$ *необхідно знайти із крайових умов (1) – (3).*

Для переходу базисних розв'язків між системами координат скористаємось формулами [18].

Для виконання граничних умов на верхній межі шару, вектори $\vec{S}_{k,m}$ в (4), за допомогою формул переходу [18], перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв'язки $\vec{u}_k^{(-)}$. Отриманий вектор при $y=h$ та $\vec{e}_y$ прирівняємо заданому $U_0^{(h)}(x,z)$, а при $\vec{e}_x$ та $\vec{e}_z$ знайдемо для нього напруження та прирівняємо заданим відповідно $\tau_1^{(h)}(x,z)$ та $\tau_2^{(h)}(x,z)$. Функції $U_0^{(h)}(x,z)$, $\tau_1^{(h)}(x,z)$, $\tau_2^{(h)}(x,z)$ попередньо представимо через подвійний інтеграл Фур'є.

Для виконання граничних умов на нижній межі шару, вектори $\vec{S}_{k,m}$ в (4), за допомогою формул переходу [18], перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв'язки $\vec{u}_k^{(+)}$. Отриманий вектор при $y=h$ та $\vec{e}_y$ прирівняємо заданому $U_0^{(\tilde{h})}(x,z)$, а при $\vec{e}_x$ та $\vec{e}_z$ знайдемо для нього напруження та прирівняємо заданим відповідно $\tau_1^{(\tilde{h})}(x,z)$ та $\tau_2^{(\tilde{h})}(x,z)$. Функції $U_0^{(\tilde{h})}(x,z)$, $\tau_1^{(\tilde{h})}(x,z)$, $\tau_2^{(\tilde{h})}(x,z)$ попередньо представимо через подвійний інтеграл Фур'є.

З цих рівнянь знайдемо функції $H_k(\lambda,\mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$ через $B_{k,m}(\lambda)$.

Для виконання граничних умов на поверхні порожнини, праву частину (4), за допомогою формул переходу [18], перепишемо у циліндричній системі координат через базисні розв'язки зовні циліндра $\vec{S}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)$ і всередині циліндра $\vec{R}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)$, після чого прирівняємо, при $\rho = R$, заданому (3).

Ці системи можна розв'язувати методом редукції і має місто збіжність наближених рішень до точного.

З отриманої системи рівнянь виключимо знайдені раніше функції $H_k(\lambda,\mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$ через $B_{k,m}(\lambda)$.

Звільнившись від рядів по m та інтегралів по λ отримаємо три нескінчених системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих $B_{k,m}(\lambda)$.

Знайдені функції $B_{k,m}(\lambda)$ підставимо у вирази для $H_k(\lambda,\mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$. Цим будуть визначені всі невідомі задачі.

Чисельні дослідження напруженого стану.

Маємо шар зі сталі Ст3сп5 з повздовжньою циліндричною порожниною. Шар – коефіцієнт Пуассона σ = 0,21, модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Геометричні параметри: $h = \tilde{h}$ = 20мм; R = 15мм.

На верхній межі шару задані нормальні переміщення $U_0^{(h)}(x,z) = -10^8 \cdot \left(z^2 + 10^2\right)^{-2} \cdot \left(x^2 + 10^2\right)^{-2}$, та дотичні напруження $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$, на нижній межі шару задані нормальні переміщення $U_0^{(\tilde{h})}(x,z) = 10^8 \cdot \left(z^2 + 10^2\right)^{-2} \cdot \left(x^2 + 10^2\right)^{-2}$, та дотичні напруження $\tau_{yx}^{(\tilde{h})} = \tau_{yz}^{(\tilde{h})} = 0$. На поверхні порожнини переміщення відсутні $U_\rho^{(p)} = U_\varphi^{(p)} = U_z^{(p)} = 0$.

Точність виконання граничних умов доведена до 10^{-5} при значеннях від 0 до 1.

Висновки

Розв'язана просторова задача теорії пружності для шару з циліндричною порожниною при заданих на верхній та нижній межах шару умов гладкого контакту, на поверхні порожнини – переміщень.

Створено алгоритм розрахунку, за яким одержано напружено – деформований стан в тілі шару. Проведений аналіз напруженого стану навколо порожнини та виявлені максимальні напруження.

Подальший розвиток цього напряму необхідний для умов першої основної задачі на поверхні порожнини.

Список джерел:

1. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». 2011. 344 с.
2. Николаев А. Г. Танчик Е. А. Упругая механика многокомпонентных тел. Харьков: Нац.аэрокосм.ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». 2014. 272 с.
3. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Stresses in an Infinite Circular Cylinder with Four Cylindrical Cavities / Journal of Mathematical Sciences. –2016. – Vol. 217, Iss. 3. – P. 299–311.
4. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Model of the Stress State of a Unidirectional Composite with Cylindrical Fibers Forming a Tetragonal Structure / Mechanics of Composite Materials. – 2016. –Vol. 52. – P. 177–188.
5. Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure / Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2016. – Vol. 57. – P. 1141–1149.
6. Проценко В. С., Украинец Н. А. Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью / Вісник Запорізького національного університету. – 2015. – Вип. 2. – С. 193–202.
7. Николаев А. Г., Орлов Е. М. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью / Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип.20. – С. 253-259.
8. Miroshnikov, V. YU. Evaluation of the stress-strain state of half-space with cylindrical cavities. Вісник Дніпровського університету. Серія: Механіка. – 2018. – Vol. 26, № 5. – P. 109 – 118. DOI: http://dx.doi.org/10.15421/371813

9. Гребенніков М. М., Миронов К. В. Задача теорії пружності для шару з циліндричною порожниною при заданих мішаних граничних умов на межах шару і умов гладкого контакту на поверхні порожнини. Proceedings of the 9th International Scientific and Practical Conference "Scientific research in XXI century" (18 – 19.06.2021). OTTAWA, CANADA, 2021. Pp. 412-417
10. Miroshnikov V. Yu. The study of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity / Strength of Materials and Theory of Structures. – 2019. – № 102. – P. 77–90. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.77-90
11. Miroshnikov V. , Denysova T., Protsenko V. The study of the first main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. Strength of Materials and Theory of Structures. Kiev, 2019. № 103. P. 208–218. DOI: https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218
12. Miroshnikov V. Y. Stress State of an Elastic Layer with a Cylindrical Cavity on a Rigid Foundation / International Applied Mechanics. – 2020. –№ 56(3). – P. 372–381. DOI: 10.1007/s10778-020-01021-x
13. Miroshnikov V. Determination of the stress state of a layer with a cylindrical cavity, located on an elastic base and given boundary conditions in the form of displacements. European Journal of Technical and Natural Sciences. Section 3. Machinery construction. Vienna. 2019. № 5-6. P.21–25 https://doi.org/10.29013/EJTNS-19-5.6-21-26
14. Гребенніков М. М., Миронов К. В. Аналіз напруженого стану шару з поздовжньою порожниною та заданими невласно мішаними граничними умовами. XXIX Міжнародна науково-практична конференція «Science, theory and practice» (08 – 10 июня, 2021). Токио, Япония, 2021. С. 536-540.
15. Miroshnikov V. Yu., Medvedeva A. V., Oleshkevich S. V. Determination of the Stress State of the Layer with a Cylindrical Elastic Inclusion. Materials Science Forum. Switzerland, 2019. Vol. 968. P. 413-420. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.413
16. Miroshnikov, V. Investigation of the Stress Strain State of the Layer with a Longitudinal Cylindrical Thick-Walled Tube and the Displacements Given at the Boundaries of the Layer. Journal of Mechanical Engineering. Kharkiv, 2019. Vol. 22, N 2. P. 44-52. https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.044
17. Мірошніков В.Ю. Змішана задача теорії пружності для шару з циліндричним включенням. Науковий вісник будівництва. Харків, 2019. Том 2, № 2(96), С. 247–252. DOI: 10.29295/2311–7257–2019–96–2–247–252
18. Николаев А.Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе. Харьков: Харьковский авиац.ин-т, 1996. 109 с.