# SECTION XVI.
# SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

DOI 10.36074/logos-01.10.2021.v1.31

## СУЧАСНІ МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

**ORCID ID: 0000-0003-3590-837X** **Задорожня Тетяна Євгенівна**
асистент
кафедри фундаментальних і природничих дисциплін
*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури*

**Шибко Дмитро Олексійович**
здобувач вищої освіти
факультету інформаційних технологій та механічної інженерії
*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури*

*УКРАЇНА*

В останні роки коло завдань, розв'язуваних за допомогою методів математичного моделювання значно розширилось. Це відбулося у зв'язку з розвитком високопродуктивних обчислень. Замість одиничних випадків використання чисельних методів для розв'язку завдань, пов'язаних із проектуванням і експлуатацією об'єктів, активно використовуються технології чисельного моделювання:

- гідродинаміка;
- термодинаміка;
- міцність;
- акустика й вібрація;
- гідропружність;
- створення будь-якої технології.

Математичне моделювання за допомогою комп'ютера стає усе більш ефективним інструментом дослідників і інженерів і часто є однієї з основних частин систем автоматизованого проектування. Воно, наприклад, дозволяє одержати загальну картину течії рідини в об'ємі й графічно візуалізувати поля швидкостей, тисків або температур. У той час як при фізичному моделюванні вимірювальні датчики розташовуються в декількох точках, де передбачається розвиток досліджуваних явищ [ 1 ].

Також при математичному моделюванні зникають проблеми, пов'язані зі збуреннями досліджуваних процесів установлюваними датчиками, застосовуваними в експериментах, а також відсутні технічні труднощі, викликувані малими або великими розмірами досліджуваних об'єктів, високими або низькими температурами, пожежонебезпечними або токсичними речовинами. При цьому чисельний розв'язок можна одержати для реальних умов досліджуваного процесу, що далеко не завжди можливо при експериментальних дослідженнях .

Зазначені переваги, а також інтенсивний розвиток обчислювальної техніки й чисельних методів в останні роки, дозволяють успішно використовувати універсальні програмні комплекси для математичного моделювання тепломасообміну й гідрогазодинаміки в багатьох галузях науки й техніки.

У зв'язку з тим, що сучасна математика дає потужні й універсальні засоби дослідження, закономірно виділити найбільш важливі вимоги, пропоновані до математичних моделей:

- універсальність, що характеризує повноту відображення моделлю досліджуваних властивостей реального об'єкта;
- адекватність - здатність відбивати потрібні властивості об'єкта з погрішністю не вище заданої;
- точність, що оцінюється ступенем збігу значень характеристик реального об'єкта й значень цих характеристик, отриманих за допомогою математичних моделей.

До теперішнього часу розроблена й реалізована безліч математичних моделей, що розглядають різноманітні аспекти в будівельному виробництві.

Метою виконуємих досліджень є розробка надійної й прогнозуючої математичної основи для вивчення гідродинамічних процесів.

Аналіз публікацій[2], присвячених вивченню гідродинамічних явищ, показує, що математичні моделі базуються в основному на рівняннях Навьє-Стокса, що включають рівняння нерозривності (закон збереження маси); рівняння імпульсу (закон збереження імпульсу); рівняння енергії (закон збереження енергії). Ці закони, представлені у вигляді диференціальних рівнянь у частинних похідних, вирішуються методом кінцевих елементів із застосуванням стандартних пакетів для комп'ютерного моделювання.

Із усіх відомих комерційних програмних продуктів найбільше поширення одержали пакети ANSYS і FLUENT.

Згідно з методологією пакета ANSYS, розробка математичної моделі включає наступні етапи:

1. Препроцесорна стадія, що включає операції по створенню геометричної моделі розглянутої розрахункової області; завданню фізичних властивостей середовища (матеріалів) у розрахунковій області; генерації кінцево-елементної моделі (дискретизація) розглянутої розрахункової області, тобто створенню сітки кінцевих елементів; додатку до моделі граничних умов: зовнішніх впливів (температур, теплових потоків, сил і т.д.) і закріплень на границях області.

Дискретизація області включає завдання числа, розмірів і форми елементів, які використовуються для побудови кінцево-елементної моделі. Елементи зв'язані один з одним у вузлових точках (вузлах) і в сукупності апроксимують форму розрахункової області. Остаточний вибір розмірів елементів проводиться, виходячи з фізичної сутності завдання.

2. Процесорна стадія, що полягає у виконанні таких операцій: одержання на основі функцій кінцевих елементів кусково-безперервної функції, визначеної на всій розрахунковій області, і побудова глобальної матриці теплопровідності; складання системи алгебраїчних рівнянь шляхом мінімізації деякої величини, пов'язаної з фізичною постановкою завдання, і розв'язок цієї системи щодо вузлових значень - температури в завданнях теплопровідності, зсувів у завданнях міцності і т.п.

3. Постпроцессорна стадія: висновок результатів розрахунків у графічній і текстової формах (поля швидкостей, деформацій і напруг, потоки тепла, температурні градієнти й ін.); аналіз отриманих результатів.

Таким чином, враховуючи особливості комп'ютерного моделювання в пакеті ANSYS, була створена математична модель перемішування рідкої сталі за рахунок продувки інертним газом у ковші, що враховує явище тепло перенесення.

Рівняння нерозривності [ 3 ], відповідне до закону збереження маси, має вигляд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

*де $V_x$, $V_y$, $V_z$ – компоненти вектора швидкості в напрямках x, y і z відповідно;*
*$\rho$ – густина;*
*x, y, z – глобальні декартові координати;*
*t – час.*

Закон збереження імпульсу, що зв'язує напруги й швидкість деформації рідини для трьох напрямків, можна представити у вигляді рівнянь Навьє-Стокса:

$$\frac{\partial \rho V_x}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_x V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_x V_z)}{\partial z} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\mu_e \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\mu_e \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\mu_e \frac{\partial v_x}{\partial z} + T_x; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho V_y}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x V_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_y V_z)}{\partial z} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\mu_e \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\mu_e \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\mu_e \frac{\partial V_y}{\partial z} + T_y; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho V_z}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x V_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_z V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z V_z)}{\partial z} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\mu_e \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\mu_e \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\mu_e \frac{\partial V_z}{\partial z} + T_z \tag{4}$$

*де $g_x$, $g_y$, $g_z$ – компоненти вектора прискорення вільного падіння в напрямках x, y і z, відповідно;*
*$M_e$ – ефективна в'язкість;*
*$T_x$, $T_y$, $T_z$ – компоненти вектору в'язких втрат у напрямках x, y і z, відповідно*

$$T_x = \frac{\partial}{\partial x}\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\mu \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\mu \frac{\partial V_z}{\partial x}; \tag{5}$$

$$T_y = \frac{\partial}{\partial x}\mu \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\mu \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\mu \frac{\partial V_z}{\partial y}, \tag{6}$$

$$T_z = \frac{\partial}{\partial x}\mu \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\mu \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\mu \frac{\partial V_z}{\partial z}. \tag{7}$$

Ефективна в'язкість ураховує ламінарну *M* (яка визначається властивостями розплаву) і турбулентну в'язкість $M_t$ (яка розраховується по моделі турбулентності)

$$\mu_e = \mu + \mu_t \tag{8}$$

Для опису турбулентності була використана SST модель (Shear Stress Transport Model) (двошарова модель Ментера), яка поєднує в собі переваги як стандартної *k*-ε моделі, так і *k*-ω моделі.

Зв'язок теплопереносу й руху рідини відображає закон збереження енергії, що представляється у вигляді термічного транспортного рівняння

$$\frac{\partial(\rho C_p T)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho C_p V_x T)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho C_p V_y T)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho C_p V_z T)}{\partial z}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+Q_v, \quad (9)$$

*де T - температура розплаву;*
*$Q_V$ - об'ємні джерела тепла;*
*k - теплопровідність розплаву;*
*$C_P$ - питома теплоємність розплаву.*

Переходячи від запису рівнянь у частинних похідних до матричної форми, формується система рівнянь, розв'язком яких є значення компонентів вектора швидкості, тиску, температури в межах розглянутої розрахункової області. Цей перехід виконується вбудованими алгоритмами пакета ANSYS.

**Висновок.** Моделювання необхідно для розуміння системи. При цьому єдиною моделі ніколи не буває достатньо. Добре організований процес повинен підказати, які ресурси необхідні для їх створення.

## Список використаних джерел:


[1] Ашихмин В. (2005). Введение в математическое моделирование: учебное пособие. Библиотека программиста. Москва: ЛОГОС .

[2] Зарубин В. (2001). Математическое моделирование в технике: учебник для вузов. Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана .

[3] Горицкий А.Ю. & Кружков С.Н. & Чечкин Г.А. (1999). Уравнения с частными производными первого порядка: учебное пособие. Москва: МГУ.