DOI 10.36074/logos-10.12.2021.v2.21

ПРО ОДИН МЕТОД ПОБУДОВИ АСИМПТОТИЧНИХ РОЗКЛАДІВ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

ORCID ID: 0000-0002-2998-9516 **Десятський Сергій Петрович**
канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики
ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет»

Гуртовий Володимир Олексійович
Здобувач вищої освіти факультету інформаційних технологій
ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет»

УКРАЇНА

Постановка проблеми.

Більшість задач, з якими стикаються інженери, фізики і фахівці в області прикладної математики і математичного моделювання, виявляє ряд істотних особливостей, які не дозволяють отримувати точні аналітичні розв’язання.

Такими особливостями є, наприклад, нелінійні, змінні коефіцієнти, межі складної форми і нелінійні граничні умови на відомих або, в деяких випадках, невідомих межах. Однак, навіть якщо буде знайдено точний розв'язок проблеми, він може виявитися марним як для математичних, так і для фізичних інтерпретацій, а також для чисельних обчислень. Прикладами таких розв'язків є спеціальні функції, що використовуються в прикладній математиці.

Таким чином, щоб отримати інформацію про властивості розв'язків, ми змушені вдаватися до наближень, чисельних розв'язків або комбінації цих двох методів. Серед наближених методів в першу чергу слід виділити асимптотичні методи.

Аналіз досліджень та публікацій

Поняття асимптотичного розкладання функції та асимптотичного ряду були введені Анрі Пуанкаре при вирішенні завдань небесної механіки. Окремі випадки асимптотичного розкладання були відкриті та застосовувалися ще у XVIII ст. Асимптотичні розкладання та ряди відіграють важливу роль у різних завданнях математики, механіки та фізики.

Основні результати, що мають відношення до теми дослідження, відображені в десятках монографій і сотнях статей, опублікованих на різних мовах.

Мета статті.

Однією з найбільш розвинених програм для виконання чисельних та аналітичних математичних розрахунків є Matematica розробки корпорації Wolfram Research. В роботі досліджується можливість її застосування для наближеної побудови асимптотичних розкладів таблично заданих функцій з відомою асимптотикою на прикладі побудови асимптотичного розкладу гамма-функції Ейлера, порівнюється ефективність роботи вбудованих в систему Wolfram Mathematica алгоритмів пошуку екстремуму.

Виклад основного матеріалу

Під асимптотичним розкладом функції $f(x)$ при $x \to L$, де L - число або $L = \infty$, будемо розуміти формулу

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n(x) + o(\varphi_{N-1}(x)); (x \to L) \quad (1)$$

де

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)); (x \to L); n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Одним з найвідоміших є розклад гамма-функції, яка узагальнює поняття факторіалу на довільні комплексні значення аргументу ($\Gamma(n+1)=n!$).

$$\Gamma(x+1)=\frac{x^x\sqrt{2\pi x}}{e^x}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}-\cdots\right);(x\to\infty) \quad (3)$$

Знаходження головного доданку $f_0(x)$ та коефіцієнтів a_n для асимптотичних розкладів неелементарних функцій

$$f(x)=f_0(x)\left(1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots\right)$$

є складною математичною задачею.

Запропонований метод знаходження наближених значень невідомих коефіцієнтів $\{a_i\}_{i=1}^{N}$ з використанням таблиці значень функції

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{f_0(x)} \quad (4)$$

на дискретній множині точок $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ на основі побудови квазілінійної апроксимації залежності

$$\varphi(x)=1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_N}{x^N} \quad (5)$$

за допомогою методу найменших квадратів на основі чисельної мінімізації суми квадратів лишків виду

$$L(a_1,a_2,\ldots,a_N)=\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi(x_i)-1-\frac{a_1}{x_i}-\frac{a_2}{x_i^2}-\ldots-\frac{a_N}{x_i^N}\right)^2 \quad (6)$$

Для порівняння ефективності роботи вбудованих в Mathematica алгоритмів чисельної оптимізації [4] були проведені розрахунки за алгоритмами пошуку екстремуму: методів спряжених градієнтів (ConjugateGradient), головних осей (PrincipalAxis), Левенберга-Марквардта (LevenbergMarquardt) та квазі-ньютонівським методом (QuasiNewton). Для порівняння ефективності методів була побудована таблиця значень функції

$$f(x)=\frac{\Gamma(x+1)e^x}{x^x\sqrt{2\pi x}} \quad (7)$$

з асимптотичним розкладом

$$f(x)=1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}-\cdots;(x\to\infty),$$

який узагальнює відому асимптотичну формулу Стірлінга для $\Gamma(n+1)=n!$. Розглядалися значення $x\in[1;60]$ з кроком $h=1$. При великих значеннях x значення $f(x)$ практично не розрізняються, що призводить до великої похибки в оцінках параметрів. Розрахунки проводилися до досягнення помилки, меншої за $\delta=10^{-7}$ або до проведення максимум 200 ітераційних кроків. Найбільш ефективним як з точки зору результатів, так і найменшого часу роботи на комп'ютері з процесором Intel Core i5-4670K, 3800 MHz на чіпсеті Z97 з 16 GB оперативної пам'яті в системі Wolfram Mathematica 11.3 виявився метод Левенберга-Марквардта. Були отримані наступні оцінки коефіцієнтів.

Таблиця 1

Оцінки коефіцієнтів асимптотичної залежності

	Точне значення	Наближене значення	Оцінка	Довірчий інтервал для $\alpha=0.0001$
a_1	$\frac{1}{12}$	0.0833333	0.0833340	$(0.0833330, 0.0833342)$
a_2	$\frac{1}{288}$	0.00347222	0.00345691	$(0.00345462, 0.00345919)$
a_3	$-\frac{139}{51840}$	-0.0026813	-0.0026357	$(-0.00264139, -0.00263005)$

Відносна похибка в усіх випадках склала менше ніж 2%. В інших методах для досягнення близьких результатів було витрачено в сотні разів більше часу.

Таким чином для чисельного розв'язання екстремальної задачі підбору оптимальних параметрів асимптотичного розкладу найбільш ефективним виявився алгоритм Левенберга-Марквардта. Інші методи виявилися малоефективними.

Висновки

Проведені чисельні експерименти довели малоефективність вбудованих в систему Wolfram Mathematica алгоритмів типу методів Ньютона та спряжених градієнтів для квадратичних функцій методу найменших квадратів для функцій, кі є майже сталими на частині множини значень.

Список використаних джерел:

[1] Олвер Ф. (1978) Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука.
[2] Коул Дж. (1972) Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир.
[3] Найфэ А. (1984) Введение в методы возмущений. М.: Мир.
[4] Эрдейи А. (1962) Асимптотические разложения. М.: ФМ.
[5] Брейн Н.Г. (1961) Асимптотические методы в анализе. М.: ИЛ.
[6] Евграфов М.А. (1979) Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука.
[7] Федорюк М.В. (1977) Метод перевала. М.: Наука.
[8] Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. (1985) Практическая оптимизация. М.: Мир.
[9] Васильев Ф. П. (2011) Методы оптимизации в двух книгах. М.: МЦНМО.
[10] Химмельблау Д. М. (1975) Прикладное нелинейное программирование. М: Мир.
[11] Wolfram S. (2003) The Mathematica Book (Fifth Edition) Wolfram Media, Inc.